PENGANTAR STATISTIKA

PROF. DR. KRISHNA PURNAWAN CANDRA, M.S.
JURUSAN TEKNOLOGI HASIL PERTANIAN
FAKULTAS PERTANIAN
UNIVERSITAS MULAWARMAN

KULIAH KE-6: BEBERAPA SEBARAN PELUANG DISKRET

PUSTAKA:
Walpole RE (1982) Pengantar Statistika. Edisi ke-3. Alih Bahasa: Sumantri B (1988). PT Gramedia, Jakarta.
Sudjana (1989) Metoda Statistika. Edisi ke-5. Penerbit Tarsito, Bandung.

TUJUAN

- Mahasiswa dapat memahami bahwa pengamatan yang berasal dari berbagai percobaan statistik yang berbeda memiliki perilaku umum yang sama atau mempunyai sebaran peluang yang pada hakekatnya sama.

6.1. SEBARAN SERAGAM

- Sebaran seragam diskret adalah sebarang yang paling sederhana.
- Bila peubah acak X mempunyai nilai-nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan peluang yang sama, maka sebaran seragam diskretnya adalah

$$f(x;k) = \frac{1}{k}, untuk\ x = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- Contoh, dadu yang sisinya setimbang mempunyai ruang contoh S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} mempunyai peluang yang sama untuk muncul dari sebuah pelemparan, yaitu 1/6. Maka sebaran seragamnya adalah $f(x;6)$ = 1/6, untuk x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

6.2. SEBARAN BINOM DAN MULTINOM

- Sebuah percobaan seringkali terdiri atas ulangan-ulangan yang masing-masing mempunyai dua kemungkinan hasil yang dapat diberi nama **berhasil** atau **gagal**. Misalnya kemungkinan munculnya sisi Gambar pada uang logam.
- Ulangan-ulangan tersebut bersifat bebas dan masing-masing mempunyai peluang sebesar ½. Percobaan tersebut dinamakan percobaan **Binom**.
- Ciri-ciri percobaan Binom:
  - Percobaan tediri dari *n* ulangan.
  - Dalam setiap ulangan, percobaan dapat digolongkan sebagai "berhasil" atau "gagal".
  - Peluang berhasil yang dilambangkan dengan *p* adalah sama, tidak berubah-ubah.
  - Ulangan-ulangan bersifat bebas satu sama lain.

6.2. SEBARAN BINOM DAN MULTINOM (LANJUTAN)

- Bila dalam suatu percobaan pelemparan mata uang sebanyak 3 kali, dan dikatakan "berhasil" bila yang muncul adalah sisi gambar, maka peubah acaknya adalah 0 sampai 3. Delapan kemungkinan yang dapat munncul adalah S = {AAA, AGA, AAG, GAA, AGG, GAG, GGA, GGA, GGG}
- Karena masing-masing ulangannya saling bebas dengan peluang sama dengan ½, maka *P(GAG) = P(G)P(A)P(G) = (1/2)(1/2)(1/2) = 1/8,* demikian peluang terjadinya kemungkinan yang lain.
- Dengan demikian sebaran peluang bagi *X* adalah atau dengan rumus $f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$, untuk *x* = 0, 1, 2, 3

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

- Peubah *X* yang menyatakan banyaknya keberhasilan dalam *n* ulangan percobaan binom disebut **peubah acak binom**.
- Sebaran peluang bagiu peubah acak binom dinamakan **sebaran binom**, dan nilai-nilainya dilambangkan dengan *b(x; n,p)*. Sebaran peluang untuk contoh diatas adalah $b\left(x; 3, \frac{1}{2}\right) = \frac{\binom{3}{x}}{8}$, untuk *x* = 0, 1, 2, 3

6.2. SEBARAN BINOM DAN MULTINOM (LANJUTAN)

- Bila "keberhasilan" dalam suatu percobaan binom mempunyai peluang p, maka setiap "kegagalan"-nya dapat terjadi dengan peluang $q = 1 - p$. Maka peluang untuk setiap urutan peubah acak tertentu adalah $p^x q^{n-x}$.
- Sedangkan banyaknya titik contoh yang mempunyai *x* keberhasilan dan *n* – *x* kegagalan dapat dihitung sebesar $\binom{n}{x}$.
- Karena sekatannya saling terpisah, maka peluang setiap sekatan adalah penggandaan dari $p^x q^{n-x}$ dengan $\binom{n}{x}$. Nilai tersebut merupakan sebaran binom

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad \text{untuk} \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Nilai tengah dan ragam bagi sebaran binom $b(x; n,p)$ adalah $\mu = np$ dan $\sigma^2 = npq$

6.2. SEBARAN BINOM DAN MULTINOM (LANJUTAN)

Teladan 5.

- Disebuah kota, keperluan uang untuk membeli narkoba ternyata melatarbelakangi 75% peristiwa pencurian yang terjadi. Berapa peluang bahwa tepat 2 dari 4 kasus pencurian berikutnya dilatarbelakangi oleh keperluan uang membeli ganja?

Jawab

- *P = ¾, maka*

$$b\left(2; 4, \frac{3}{4}\right) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{3^2}{4^4} = 0{,}211$$

6.2. SEBARAN BINOM DAN MULTINOM (LANJUTAN)

Teladan 6.

- Peluang seseorang sembub dari suatu penyakit darah adalah 0,4. Bila 15 orang diketahui menderita penyakit ini, berapa peluang bahwa (a) sekurang-kurangnya 10 orang dapat sembuh; (b) ada 3 sampai 8 orang sembuh; (c) tepat 5 orang sembuh?

Jawab

a) Misalkan X adalah banyaknya orang yang sembuh. Maka

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{9} b(x; 15, 0{,}4) = 1 - 0{,}9662$$

$$= 0{,}0338$$

b) $P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{x=3}^{8} b(x; 15, 0{,}4)$

$$= \sum_{x=0}^{8} b(x; 15, 0{,}4 - \sum_{x=0}^{2} b(x; 15, 0{,}4)$$

$$= 0{,}9050 - 0{,}0271 = 0{,}8779$$

c) $P(X = 5) = b(5; 15, 0{,}4)$

$$= \sum_{x=0}^{5} b(x; 15, 0{,}4) - \sum_{x=0}^{4} b(x; 15, 0{,}4)$$

$$= 0{,}4032 - 0{,}2173 = 0{,}1859$$

6.2. SEBARAN BINOM DAN MULTINOM (LANJUTAN)

- Seandainya dalam percobaan binom tersebut setiap ulangan menghasilkan lebih dari dua kemungkinan hasil, maka percobaan itu menjadi **percobaan multinom**. Contoh:
  - Pada percobaan pelemparan dua dadu, diamati dari kedua dadu muncul bilangan yang sama, total kedua bilangan sama dengan 7 atau 11, atau bukan keduanya.
  - Pengambilan kartu dengan pemulihan bila yang diamati adalah keempat macam kartu yang ada.
- Bila setiap ulangan menghasilkan salah satu dari *k* hasil percobaan $E_1, E_2, \ldots, E_k$, dengan peluang $p_1, p_2, \ldots, p_k$, maka sebaran peluang bagi peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_k$, yang menyatakan berapa kali $E_1, E_2, \ldots, E_k$, terjadi dalam *n* ulangan yang bebas, adalah

$$f(x_1, x_2, \ldots, xk; p_1, p_2, \ldots, pk, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, xk} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}, \qquad \text{dengan}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

6.2. SEBARAN BINOM DAN MULTINOM (LANJUTAN)

Teladan 8

- Bila dadu dilemparkan 6 kali, berapa peluang mendapatkan jumlah bilangan yang muncul sebesar 7 atau 11 sebanyak dua kali, bilangan yang sama pada kedua dadu sekali, dan kemungkinan lainnya tiga kali?

Jawab

- Daftar kejadian yang mungkin terjadi:
  E_1: terjadi total 7 atau 11
  E_2: muncul bilangan yang sama pada kedua dadu
  E_3: kemungkinan lainnya selain dua diatas
  Dalam setiap ulangan, peluang masing-masing kejadian diatas adalah *p_1= 2/9, p_2=1/6, dan p_3=11/18.*
  Ketiga peluang tersebut tidak berubah dari ulangan yang satu ke ulangan yang lainnya. Menggunakan sebaran multinom dengan x_1=2, x_2=1, dan x_3=3, didapatkan peluang yang ditanyakan:

$$f\left(2,1,3; \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{11}{8}, 6\right) = \binom{6}{2,1,3}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{11}{18}\right)^3$$
$$= \frac{6!}{2!\,1!\,3!} \cdot \frac{2^2}{9^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{11^3}{18^3}$$
$$= 0{,}1117$$

6.3. SEBARAN HIPERGEOMETRIK

- Sebaran binom tidak dapat diterapkan untuk menghitung peluang diperolehnya 3 kartu merah dalam 5 kali pengambilan, kecuali bila setiap kali kartu dikembalikan dan kartu dikocok lagi sebelum pengambilan berikutnya.
- Untuk percobaan (pengambilan titik contoh lebih dari satu kali) yang dilakukan tanpa pemulihan digunakan sebaran hipergeometrik.
- Secara umum, bila kita tertarik pada peluang terambilnya x keverhasilan dari k benda yang diberi label "berhasil" dan $n - x$ kegagalan dari $N - k$ benda yang diberi label "gagal", bila suatu contoh berukuran *n* diambil dari sebuah populasi terhingga berukuran N, maka percobaan demikian dikenal sebagai **percobaan hipergeometrik**.

6.3. SEBARAN HIPERGEOMETRIK (LANJUTAN)

- Percobaan hipergeometrik mempunyai dua sifat:
  - Suatu contoh berukuran n diambil dari populasi berukuran N.
  - k dari N benda diklasifikasikan sebagai berhasil dan $N - k$ benda diklasifikasi sebagai gagal.
- Banyaknya keberhasilan X dalam percobaan hipergeometrik disebut **peubah acak hipergeometrik**, dan sebaran peluang bagi peubah acak hipergeometrik disebut **sebaran hipergeometrik**, yang nilainya dilambangkan dengan *h(x; N,n,k)*.

$$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad \text{untuk} \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

6.3. SEBARAN HIPERGEOMETRIK (LANJUTAN)

- Tedalan 9.
- Sebuah panitia terdiri atas 5 orang diambil secara acak dari 3 perempuan dan 5 laki-laki. Carilah sebaran peluang bagi banyaknya perempuan dalam panitia itu.

- Jawab
- Misalkan X adalah banyaknya perempuanyang duduk dalam panitia itu X={0, 1, 2, 3}, maka

$$P(X=0)=h(0;8,5,3)=\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}}=\frac{1}{56}$$

$$P(X=1)=h(1;8,5,3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{4}}{\binom{8}{5}}=\frac{15}{56}$$

$$P(X=2)=h(2;8,5,3)=\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}}=\frac{30}{56}$$

$$P(X=3)=h(3;8,5,3)=\frac{\binom{3}{3}\binom{5}{2}}{\binom{8}{5}}=\frac{10}{56}$$

- Dalam bentuk tabel sebaran hipergeometrik bagi X dapat dituliskan sebagai berikut

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/56	15/56	30/56	10/56

- Dalam bentuk rumus dituliskan sebagai

$$P(X=x)=h(x;8,5,3)=\frac{\binom{3}{x}\binom{5}{N-x}}{\binom{8}{5}}, \text{untuk } x=0,1,2,3$$

6.4. SEBARAN HIPERGEOMETRIK (LANJUTAN)

Teladan 10.

- Bila 5 kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge, berapa peluang diperoleh 3 kartu hati?

Jawab

- Dengan menggunakan sebaran hipergeometrik untuk $n = 5, N = 52, k = 13, x = 3,$ maka peluang memperoleh 3 kartu hati adalah

$$h(3;52,5,13)=\frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}}$$
$$=0{,}0815$$

6.4. SEBARAN HIPERGEOMETRIK (LANJUTAN)

Nilaitengah dan ragam bagi sebaran hipergeometrik *h(x; N, n, k)* adalah

$$\mu = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}.n.\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

Untuk *n* relatif kecil dibandingkan N, maka peluang setiap pengambilan akan berubah kecil sekali, sehingga dapat dikatakan sama dengan percobaan binom dengan peluang sama dengan *p*=k/N.

$$\mu = np = \frac{nk}{N}$$

$$\sigma^2 = npq = n.\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)$$

Teladan 13.

- Perusahaan telepon melaporkan bahwa diantara 5.000 pemasang telepon baru, 4.000 menggunakan telepon tombol. Bila 10 diantara pemasang barutersebut diambil secara acak, berapa peluang tepat ada 3 rang yang menggunakan telepon putar?

Jawab

- $h(3; 5000, 10, 1000) \cong b(3; 10, 0{,}2)$

$$\frac{\binom{1000}{3}\binom{5000-1000}{10-3}}{\binom{5000}{10}} \cong \sum_{x=0}^{3} b(x; 10, 0{,}2) - \sum_{x=0}^{2} b(x; 10, 0{,}2)$$

$$\frac{\frac{1000!}{3!\,997!}\cdot\frac{4000!}{7!\,3993!}}{\frac{5000!}{10!\,4990!}} \cong 0{,}8791 - 0{,}6778$$

$0{,}201477715 \cong 0{,}2013$

6.4. SEBARAN HIPERGEOMETRIK (LANJUTAN)

Sebaran hipergeometrik peubah ganda

Bila suatu populasi berukuran *N* disekat menjadi *k* sel $A_1, A_2, ..., A_k$ masing-masing dengan $a_1, a_2, ..., a_k$, maka sebaran peluang bagi peubah acak $X_1, X_2, ..., X_k$, yang menyatakan banyaknya unsur yang terambil dari sel-sel $A_1, A_2, ..., A_k$ bila dari populasi itu diambil contoh acak berukuran *n* adalah

$$f(x_1, x_2, \dots, xk; a_1, a_2, \dots, ak, N, n) = \frac{\binom{a_1}{x_1}\binom{a_2}{x_2}\dots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

Sedangkan dalam hal ini

$\sum_{i=1}^{k} x_1 = n$ dan $\sum_{i=1}^{k} a_1 = N$

Teladan14.

Seseorang hendak menanami halaman belakang dan depan rumahnya dengan tanaman bunga. Dari sebuah kotak yang berisi 3 umbi tulip, 4 umbi daffodil, dan 3 umbi hyacinth ia mengambil 5 umbi secara acak untuk ditanamn dihalaman depan, sedangkan 5 umbi sisanya ditanam dihalaman belakang. Berapa peluang ketika musim bunga tiba di halaman depan berbunga 1 tulip, 2 daffodil, dan 2 hyacinth?

Jawab

- Dengan menggunakan sebaran hipergeometrik untuk $x_1=1, x_2=2, x_3=2, a_1=3, a_2=4, a_3=3, n=5, N=10,$ maka peluang memperoleh 3 kartu hati adalah

$$h(1,2,2; 3,4,3,10,5) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{3}{14}$$

6.4. SEBARAN BINOM NEGATIF DAN SEBARAN GEOMETRIK

- Percobaan binom negatif sama dengan percobaan binom, kecuali bahwa ulangan diulang terus sampai terjadi sejumlah tertentu keberhasilan. Jadi kita tertarik pada peluang bahwa keberhasilan ke-*k* terjadi pada ulangan ke-*x*.
- Misal, Sebuah percobaan terkontrol membiarkan tikus tertular suatu penyakit. Peluang tikus tertular penyakit adalah 0,6. Kita ingin mengetahui peluang tikus yang ke-7 yang dibiarkan tertular penyakit merupakan tikus ke-5 yang terserang penyakit tersebut.
- Kemungkinan urutan hasil percobaan diatas bila *S* menyatakan keberhasilan dan *F* menyatakan kegagalan adalah *SFSSSFS*, yang terjadi dengan peluang $(0{,}6)^5(0{,}4)^2$. Hal ini dapat dilakukan dalam $\binom{6}{4} = 15$. Jadi peluang bahwa tikus ke-7 merupakan tikus ke-5 yang tertular adalah $P(X = 7) = \binom{6}{4}(0{,}6)^5(0{,}4)^2 = 0{,}1866$
- Bilangan *X* yang menyatakan banyaknya ulangan yang menghasilkan *k* keberhasilan dalam suatu percobaan binom negatif disebut **peubah acak binom negatif**, sedangkan sebaran peluangnya disebut **sebaran binom negatif**.
- Bila ulangan yang bebas dan berulang-ulang dapat menghasilkan keberhasilan dengan peluang *p* dan kegagalan *q=1-p*, maka sebaran peluang bagi peubah acak *X* merupakan **sebaran binom negatif**, yang dinyatakan sebagai

$$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}, untuk\ x = k, k+1, k+2, \ldots$$

6.4. SEBARAN BINOM NEGATIF DAN SEBARAN GEOMETRIK (LANJUTAN)

Teladan 15.

- Hitunglah peluang seseorang yang melemparkan 3 uang logam akan mendapatkan semua sisi gambar atau semua sisi angka untuk kedua kalinya pada lemparan ke-5.

Jawab

- Dengan menggunakan sebaran binom negatif dengan *x=5*, *k=2*, dan *p=1/4*, kita mendapatkan

$$b^*(5; 2{,}1/4) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$= \frac{4!}{1!\,3!} \cdot \frac{3^3}{4^5} = \frac{37}{256}$$

6.4. SEBARAN BINOM NEGATIF DAN SEBARAN GEOMETRIK (LANJUTAN)

- Untuk k=1, sebaran binom negatif akan menghasilkan sebaran peluang bagi banyaknya ulangan yang diperlukan sampai diperolehnya satu keberhasilan. Misalkan pada pelemparan uang logam sampai munculnya sisi Gambar.
- Dengan demikian sebaran binom negatif tereduksi menjadi b*(x; 1,p)=pqx-1, x=1, 2, 3, ... Karena suku-suku yang berurutan membentuk suatu barisan geometrik, maka kasus khusus ini disebut **sebaran geometrik** dan nilai-nilainya dilambangkan dengan *g(x; p)*.
- Lebih jelasnya **Sebaran Geometrik** didefiniskan sebagai:
  - Bila tindakan yang bebas dan berulang-ulang dapat menghasilkan keberhasilan dengan peluang *p* dan kegagalan dengan peluang *q=1-p*, maka sebaran peluang bagi peubah acak *X*, yaitu banyaknya ulangan sampai munculnya keberhasilan yang pertama diberikan menurut rumus
    $b^*(x; k, p) = pq^{x-1}, untuk\ x = 1, 2, 3, \ldots$

6.4. SEBARAN BINOM NEGATIF DAN SEBARAN GEOMETRIK (LANJUTAN)

Teladan 16.

- Hitunglah peluang bahwa seseorang yang melemparkan sekeping uang logam yang setimbang, memerlukan 4 lemparan sampai diperoleh sisi gambar.

Jawab

- Dengan menggunakan sebaran geometrik dengan *x* = 4 dan *p* = ½, kita memperoleh
  $g(4; ½) = ½(½)^3 = 1/16$

6.5. SEBARAN POISSON

- Percobaan **Poisson** adalah percobaan yang menghasilkan nilai-nilai bagi suatu peubah acak *X*, yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu.
- Peubah acaknya (*X*) dapat berupa banyaknya dering telepon per jam disuatu kantor, jumlah hari sekolah ditutup karena banjir; **atau** banyaknya tikus sawah per hektar, banyaknya bakteri dalam suatu kultur biakan, banyaknya kesalahan ketik per halaman.
- Ciri-ciri percobaan Poisson:
  1. Banyaknya hasil percobaan tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.
  2. Peluang terjadinya suatu hasil percobaan sebanding dengan panjang selang waktu atau besar daerah tersebut, dan tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi diluar selang waktu atau daerah tersebut.
  3. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan dalam selang waktu dan daerah tersebut dapat diabaikan.

6.5. SEBARAN POISSON (LANJUTAN)

- Bilangan *X* yang menyatakan hasil percobaan dalam suatu percobaan Poisson disebut **peubah acak Poisson** dan sebaran peluangnya disebut **sebaran Poisson**.
- Sebaran Poisson dinyatakan sebagai $p(x; \mu)$, ang dinyatakan dengan rumus

$$p(x;\ \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}, untuk\ x = 1, 2, \ldots$$

- Dengan ketentuan bahwa
  μ = rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau dalam daerah yang dinyatakan.
  e = 2.71828...

6.5. SEBARAN POISSON (LANJUTAN)

Teladan 17 dan 18

- Rata-rata jumlah hari sekolah ditutup karena banjir selama musim penghujan di daerah Melak adalah 4. Beapa peluang bahwa sekolah-sekolah di Melak ditutup selama 6 hari dalam suatu musim penghujan?
- Rata-rata banyaknya tikus per ha dalam suatu ladang padi seluas 5 ha diduga sebesar 10. Hitung peluang bahwa dalam suatu luasan 1 ha terdapat lebih dari 15 tikus.

Jawab

- Dengan menggunakan sebaran Poisson dengan *x* = 6 dan μ = 4, kita memperoleh dari

  $$p(6;4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!}$$
  $$= \sum_{x=0}^{6} p(x;4) - \sum_{x=0}^{5} p(x;4)$$
  $$= 0{,}8893 - 0{,}7851 = 0{,}1042$$

- $P(X > 15) = 1 - P(X \le 15)$

  $$= 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x;10) = 1 - 0{,}9513 = 0{,}0487$$