PENGANTAR STATISTIKA

PROF. DR. KRISHNA PURNAWAN CANDRA, M.S.
JURUSAN TEKNOLOGI HASIL PERTANIAN
FAKULTAS PERTANIAN
UNIVERSITAS MULAWARMAN

KULIAH KE-4: PELUANG

PUSTAKA:

Walpole RE (1982) Pengantar Statistika. Edisi ke-3. Alih Bahasa: Sumantri B (1988). PT Gramedia, Jakarta.
Sudjana (1989) Metoda Statistika. Edisi ke-5. Penerbit Tarsito, Bandung.

TUJUAN

- Mahasiswa dapat mendeskripsikan peluang dan teori-teori peluang, serta dapat menggunakannya dalam berbagai kejadian.

4.1. RUANG CONTOH

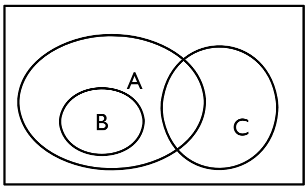
- **Percobaan** dilakukan untuk mendapatkan/membangkitkan data.
- Semua kemungkinan (data) yang muncul dalam suatu percobaan dinamakan **ruang contoh**.
- **Ruang contoh**, disimbolkan dengan **himpunan S**. Misalkan kemungkinan mendapatkan sisi Gambar atau sisi Angka pada percobaan pelemparan uang logam, dituliskan sebagai S = {G,A}. G = gambar, A = Angka.
- Ruang contoh dari suatu kegiatan evaluasi proses produksi di pabrik dilakukan dengan mengambil 3 contoh dan mencatatnya sebagai Cacat (C) atau Tidak cacat (T). Maka ruang contoh yang dibangkitkan adalah S = {CCC, CCT, CTC, CTT, TCC, TCT, TTC, TTT).
- Untuk menuliskan kemungkinan hasil percobaan berupa himpunan kota-kota didunia yang dihuni oleh lebih dari 1 juta penduduk, maka ruang contohnya adalah S = {x / x adalah kota berpenduduk lebih dari satu jiwa }

4.2. KEJADIAN

- Dalam percobaan, sering muncul ***kejadian*** tertentu. Misal suatu kejadian A didefinisikan sebagai munculnya bilangan yang habis dibagi tiga dari sebuah pelemparan dadu. Maka A = {3, 6}.
- ***Kejadian*** ini merupakan himpunan-bagian dari ruang contoh.
- **Kejadian sederhana**, adalah kejadian yang dinyatakan sebagai himpunan yang terdiri dari satu titik contoh. Kejadian terambilnya kartu hati dari seperangkat (52 kartu) bridge dinyatakan sebagai A = {hati}. A merupakan kejadian sederhana dari S = {hati, sekop, klaver, wajik}
- **Kejadian majemuk**, adalah kejadian yang dinyatakan sebagai sebagai gabungan dari beberapa kejadian sederhana. Kejadian terambilnya kartu merah (B) merupakan kejadian majemuk, karena B = {hati U wajik} = {hati, wajik}.
- Himpunan bagian yang tidak mempunyai anggota dari ruang contoh dinamakan **Ruang nol** atau **Ruang Kosong** atau **Himpunan-kosong (Ø)**.
- Contoh himpunan-kosong, B = {x / x adalah faktor bukan prima bagi 7 selain 1}

4.2. KEJADIAN (LANJUTAN)

- Perhatikan diagram Venn berikut yang menggambarkan percobaan pengambilan kartu bridge:



- Maka kemungkinan kejadian yang menggambarkan diagram Venn tersebut adalah
  - A : kartu yang terambil berwarna merah
  - B : kartu yang terambil adalah Jack, Queen, atau King Wajik
  - C : kartu yang terambil adalah As

4.3. PENGOLAHAN TERHADAP KEJADIAN

- Himpunan-bagian dari suatu ruang contoh dapat mempunyai hubungan antara satu dengan lainnya.
- Irisan antara A dan B, dilambangkan sebagai $A \cap B$
- Bila dua himpunan-bagian yang terpisah maka hasilnya adalah $\varnothing$
- Gabungan antara A dan B, dilambangkan sebagai $A \cup B$
- Komplemen dari suatu kejadian A, dilambangkan sebagai A'

4.4. MENCACAH TITIK CONTOH

Beberapa kaidah pencacahan titik contoh, adalah

- **Kaidah penggandaan**, bila suatu operasi dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan bila untuk setiap cara tersebut operasi kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara, dan bila setiap pasangan dua cara yang pertama operasi ketiganya dapat dilakukan dalam n_3 cara dan seterusnya, maka secara umum untuk k operasi dalam urutan tersebut dapat dilakukan dalam $\mathbf{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k}$ cara.
- **Kaidah Permutasi**, susunan yang dapat dibentuk oleh keseluruhan atau sebagian dari sekumpulan benda.
  1. Banyaknya permutasi dari **n benda** dinyatakan sebagai n! (**n** x **(n-1)** x **(n-2)** x ... x **1**)
  2. Banyaknya permutasi akibat **pengambilan r benda dari n benda yang berbeda** dinyatakan sebagai ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
  3. Banyaknya **permutasi n benda yang berbeda yang disusun dalam suatu lingkaran** adalah (n-1)!

4.4. MENCACAH TITIK CONTOH (LANJUTAN)

Beberapa kaidah pencacahan titik contoh, adalah

- **Kaidah Permutasi** (lanjutan)
  4. Banyaknya **permutasi dari n benda yang n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua,..., n_k** berjenis ke-k adalah $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_3!}$
  5. Banyaknya **cara menyekat sekumpulan n benda kedalam r sel**, dengan n_1 unsur dalam sel pertama, n_2 unsur dalam sel kedua, dan demikian seterusnya adalah $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots\ n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$
  6. Banyaknya **susunan (kombinasi) r benda dari n benda yang berbeda** adalah $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

4.4. MENCACAH TITIK CONTOH (LANJUTAN)

Teladan

- Bila sepasang dadu dilempar sekali, berapa banyak titik contoh dalam ruang contohnya? (6x6 = 36)
- Berapa macam menu makan siang yang terdiri dari sup, *sandwich*, *desert*, dan minuman yang dapat dipilih dari 4 macam sup, 3 jenis *sandwich*, 5 *desert*, dan 4 minuman? (4x3x5x4 = 240)
- Berapa banyak bilangan genap, terdiri dari tiga angka yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 5, 6, dan 9, bila setiap angka tersebut hanya sekali boleh digunakan? (2x4x3 = 24)
- Dua kupon lotere diambil dari 20 kupon untuk menentukan hadiah pertama dan kedua. Hitung banyaknya titik contoh dalam ruang contohnya! ($_{20}P_2 = \frac{20!}{18!} = (20)(19) = 380$)
- Berapa banyak cara sebuah regu bola basket dapat menjadwalkan 3 pertandingan dengan 3 regu lainnya bila semuanya bersedia pada 5 kemungkinan tanggal yang berbeda? ($_5P_3 = \frac{5!}{2!} = (5)(4)(3) = 60$)

4.4. MENCACAH TITIK CONTOH (LANJUTAN)

Teladan

- Berapa banyak susunan yang berbeda bila kita ingin membuat sebuah rangkaian lampu hias untuk pohon natal dari 3 lampu merah, 4 kuning, dan 2 biru? ((9!)/(3!4!2!) = 1260)
- Berapa banyaknya cara 7 orang dapat menginap dalam 1 kamar tripel dan 2 kamar dobel? ((7!)/(3!2!2!) = 210)
- Dari 4 orang anggota partai Republik dan 3 anggota partai Demokrat, hitunglah banyaknya komisi yang terdiri dari 3 orang dengan 2 orang dari partai Republik dan 1 orang dari partai Demokrat yang dapat dibentuk! (Banyak cara untuk memilih partai Republik = $\binom{n}{r} = \binom{4!}{2!\,2!} = 6$; Banyak cara untuk memilih partai Demokrat = $\binom{n}{r} = \binom{3!}{1!\,2!} = 3$. Jadi banyaknya komisi yang dibentuk adalah 6x3 = 18.

4.5. PELUANG SUATU KEJADIAN

- Teori peluang bagi ruang contoh terhingga memberikan segugus bilangan nyata yang disebut **pembobot** atau **peluang**,
- **Peluang** suatu kejadian A, P(A), adalah jumlah peluang semua titik contoh dalam A. **$0 \le P(A) \le 1$,** **$P(\varnothing) = 0$, $P(S) = 1$**
- Bila suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan yang berbeda, dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, dan bila tepat n diantara hasil percobaan itu menyusun kejadian A, maka peluang kejadian A adalah $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}}$

4.5. PELUANG SUATU KEJADIAN (LANJUTAN)

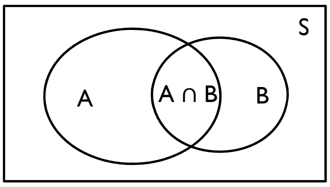
Teladan

- Sekeping uang logam dilemparkan dua kali. Berapa peluang sekurang-kurangnya sisi gambar muncul sekali? (3/4)
- Sebuah dadu dibuat tidak seimbang sehingga bilangan genap dua kali lebih besar peluangnya untuk muncul dari pada bilangan ganjil. Bila *E* adalah kejadian munculnya bilangan yang lebih kecil dari 4 pada satu kali pelemparan dadu tersebut, tentukanlah *P(E)*. (4/9)
- Hitunglah peluang memperoleh kartu hati bila sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge? (1/4)

4.5. KAIDAH PENJUMLAHN

Penghitungan peluang

- Kaidah penjumlahan, bila A dan B adalah suatu kejadian sembarang, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



- Bila A dan B saling terpisah, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Bila $A_1, A_2, \ldots, A_n$ saling terpisah maka $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$. Bila $A_1, A_2, \ldots, A_n$ merupakan sekatan ruang contoh S, maka

  $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(S) = 1$
- Bila A dan A' adalah dua kejadian yang satu merupakan komplemen lainnya, maka $P(A) + P(A') = 1$

PELUANG BERSYARAT

- Peluang terjadinya kejadian *B* bila diketahui bahwa kejadian lain *A* telah terjadi disebut **peluang bersyarat** dan dilambangkan dengan *P*(*B*|*A*). Dibaca "peluang terjadinya *B* bila *A* telah terjadi" atau **"peluang *B*, bila *A* diketahui"**. Didefinisikan sebagai $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- Peluang untuk terpilihnya seorang sarjana laki-laki (L) yang telah bekerja (B) dari kondisi

	Bekerja	**Menganggur**	***Jumlah***
Laki-laki	460	40	500
Perempuan	140	260	400
Jumlah	600	300	

- $P(L|B) = 460/600 = 23/30$

PELUANG BERSYARAT (LANJUTAN)

Kaidah Penggandaan:

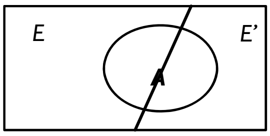
- Dua kejadian *A* dan *B* dikatakan bebas, bila $P(B|A) = P(B)$ atau $P(A|B) = P(A)$; $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$; $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)\, P(A|B)$
- Jika dalam suatu percobaan kejadian-kejadian $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dapat terjadi,maka
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) =$
  $P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots\ P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$

  Jika kejadian-kejadian $A_1, A_2, \ldots, A_k$ bebas, maka
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) \ldots P(A_k)$

DALIL PELUANG TOTAL

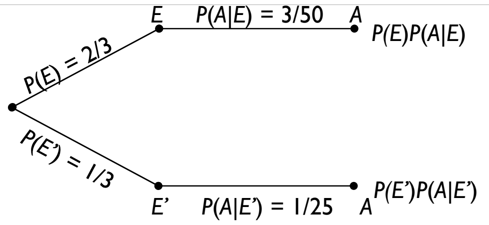
E = Employee = Bekerja
E' = Bukan Employee = Menganggur

	Bekerja	**Menganggur**	***Jumlah***
Laki-laki	460	40	500
Perempuan	140	260	400
Jumlah	600	300	



- Data diatas terdapat tambahan informasi bahwa 36 diantara yang bekerja dan 12 diantara yang menganggur adalah alumni THP. Kita ingin menghitung kejadian A bahwa individu yang terambil adalah alumni THP. Maka kejadian A dapat digambarkan seperti pada diagram Venn diatas.
- Pada diagram Venn tersebut, *A* dapat dituliskan sebagai: $A = (E \cap A) \cup (E' \cap A)$
- $P(A) = P[(E \cap A) + (E' \cap A)] = P(E \cap A) + P(E' \cap A) = P(E)P(A|E) + P(E')P(A|E')$
- $P(E) = 600/900 = 2/3$, $P(E') = 1/3$
- $P(A|E) = 36/600 = 3/50$, $P(A|E') = 12/300 = 1/25$
- $P(A) = (2/3)(3/50) + (1/3)(1/25) = 4/75$

DALIL PELUANG TOTAL (LANJUTAN)



- Generalisasi dari gambar diatas pada kasus penyekatan ruang contoh menjadi k himpunan-bagian disebut **dalil peluang total** atau **kaidah eliminasi,** yaitu
- Bila kejadian-kejadian B_1, B_2, ≠ 0 untuk i=1, 2, 3, ... , k Maka untuk sembarang kejadian kyang merupakan himpunan bagian S berlaku
- $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_k)P(A|B_k)$

KAIDAH BAYES

- Dengan kaidah Bayes dapat dihitung peluang kejadian suatu himpunan bagian berdasarkan suatu syarat.
- **Kaidah Bayes**, jika kejadian-kejadian $B_1, B_2, \dots, B_k$ merupakan sekatan dari ruang contoh S dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk i = 1, 2, ... , k, maka untuk sembarang kejadian A yang bersifat $P(A) \neq 0$,

$$\boldsymbol{P(B_r|A) = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k)}}$$

Untuk r = 1, 2, ... , k

KAIDAH BAYES

Teladan :

- Tiga anggota sebuah organisasi telah dicalonkan sebagai ketua dengan peluang terpilih sbb, Tuan Adam 0,3; Tuan Brown 0,5; dan Nyonya Cooper 0,2. Seandainya Tuan Adam terpilih peluang terjadinya kenaikan iuran anggota adalah 0,8. Dan bila Tuan Brown atau Nyonya Cooper terpilih peluang kenaikan iuran anggota adalah 0,1 dan 0,4. Ternyata iuran anggota dinaikkan sebelum terjadinya pemilihan. Dengan kondisi tersebut hitung peluang terpilihnya Nyonya Cooper menjadi Ketua organisasi tersebut.

Jawab :

- $\boldsymbol{P(B_3|A)} = \frac{\boldsymbol{P(B_3)P(A|B_3)}}{\boldsymbol{P(B_1)P(A|B_1 + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}} = \frac{0{,}2\mathrm{X}0{,}4}{0{,}3\mathrm{X}0{,}8 + 0{,}5\mathrm{X}0{,}1 + 0{,}2\mathrm{X}0{,}4} = \frac{0{,}08}{0{,}24 + 0{,}05 + 0{,}08} = \frac{8}{37}$